



TITLE:

鉛直に振動する粒状体薄層の座屈
による撓み波と表面波 (オイラー方
程式250年: 連続体力学におけるオ
イラーの遺産)

AUTHOR(S):

佐野, 理

CITATION:

佐野, 理. 鉛直に振動する粒状体薄層の座屈による撓み波と表面波 (オイラー方程式250年: 連続体力学におけるオイラーの遺産). 数理解析研究所講究録 2008, 1608: 131-141

ISSUE DATE:

2008-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/139984>

RIGHT:

鉛直に振動する粒状体薄層の座屈による撓み波と表面波 Buckling-Induced Undulation and Surface Waves on a Vertically Vibrating Thin Granular Layer

東京農工大学・院工・物理 佐野 理 (Osamu Sano)
Dept. Appl. Phys., Tokyo Univ. Agri. Tech.

1. はじめに

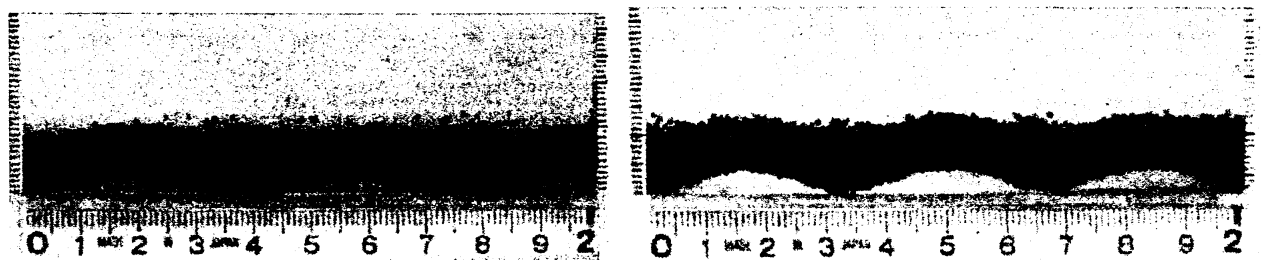
粒状体は有限な大きさを持ちエネルギー散逸を伴う古典粒子の高密度集合体である。外部からのエネルギー供給により（局所的に）流動化するが、エネルギーの供給が途絶えれば静止してしまう。たとえば、安息角以上に傾いた斜面に発生する雪崩、臨界加速度以上に加振した場合に見られる対流や波動、流れによって作られる砂丘や砂漣など。これらの現象を理解する基本になるのは粒状体を構成する個々の粒子の運動（ラグランジュ的情報）であるが、われわれの知りたいのは全体的なパターン（オイラー的情報）であることが多い。

粒状体では粒子間の接触点で相互作用をするだけで、クーロン力のような遠距離の相互作用はない。粒子間多重衝突による運動量輸送やエネルギー散逸の結果、何らかの運動状態が実現される多体問題であり、排除体積効果に起因した履歴を伴う。また、流動化する場合でも、系全体が一様ということは稀で、多くの場合“流体”領域と“固体”領域が混在している。こうした複雑な系であるために、粒子集合体という離散系から粒状体全体の示すパターンという連続体的な挙動の理解にはまだかなりの距離があるように思う。粒状体はミクロな粒子運動とマクロなパターンを結びつけるメソスコピックな系であり、また、ラグランジュ的描像とオイラー的描像を結びつける格好の対象でもある。

以下では、粒状体を鉛直方向に加振した場合に見られる挙動についていくつかの実験結果を紹介し、また、簡単なモデル解析を試みる¹⁾。

2. 実験

奥行方向が3層程度の狭い縦型容器に粒状体を10層程度満たし、鉛直方向に $z = a \sin(2\pi ft + \delta)$ で加振したときの粒子の振る舞いを水平方向から高速度ビデオカメラで観測する．ここで f と a はそれぞれ振動の振動数と振幅， δ は位相である．ただしここでは δ は制御していない．粒子としてはガラスビーズ，鉛，アルミニウム，アルミナ，など，また粒径 d は $0.1 \sim 2\text{mm}$ の数種類で行っている．振動数や振幅を変化させると様々なパターンが現われる．その一例を以下に示す．まず，図1はわれわれが undulation と呼んでいる撓み波である²⁻⁴⁾．加振条件により，容器全体にわたって整数個あるいは半整数個のアーチ状の変位が見られる．前者をS型，後者をA型，また波の数を付して S_n ， A_n などと名付けておく．これらのパターンは外部振動数 f で山と谷を交代し，パターンの周期は $2/f$ となる．



(a) A_3 : $f = 48\text{ Hz}$, $a = 0.83\text{ mm}$

(b) S_3 : $f = 40\text{ Hz}$, $a = 1.26\text{ mm}$

図1. Undulation パターン．粒子は鉛で粒径 $d = 1.0\text{ mm}$ ．

図2は ripple と呼んでいる表面波である．これも周期 $1/f$ で山と谷を交代する（したがってパターン周期は $2/f$ ）．この他に ripple としては周期が $4/f$ のパターンも容易に観測される．



$f = 14\text{ Hz}$, $a = 4.7\text{ mm}$

図2. Ripple パターン．

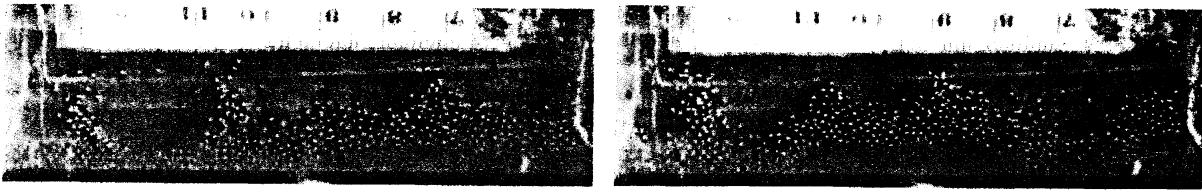
(a) $f = 29.7\text{Hz}$, $a = 2.02\text{mm}$ (b) $f = 30\text{Hz}$, $a = 2.21\text{mm}$

図 3. Undulation に ripple が乗ったタイプ.

図 3 は前述の undulation と ripple が重なったタイプとみなすことのできるもので、undulation の頂点付近で層の上部がスパイク状に突出する.

3. 座屈と撓み波

これらの変位の原因を探るために、われわれは高速度ビデオカメラにより構成粒子の運動を追跡した. 図 4 は粒状体の層が容器底面と衝突する時に見られる粒子の再配置の様子である^{3,4)}. 図 4 (a) (b) (c) のそれぞれは 1/1000 秒間隔で撮影した画像が 6 枚重ねてある. したがって粒子の輪郭の円形が認められる部分は 5/1000 秒の間、粒子の相対位置が変化しなかったことを、また逆に像にブレがある部分はその間に動いていることを示している. これらの図を基に、粒子群と容器底面との衝突の様子を図解したものが図 4 (d) (e) である. 粒子群はほぼ最密充填の状態にあるが、衝突により粒子の配置は (d) から (e) に変化し、水平方向に局所的な膨張が起こる. しかし、全体としては水平方向の長さは容器の側壁によって限られているので、これを解決するために、図 5 のように、粒状体の層全体が上方に湾曲するか、あるいは粒子が層の上部に競り上がる現象が起こる. 前者は undulation タイプの、また後者は ripple タイプの変位と考えられる.

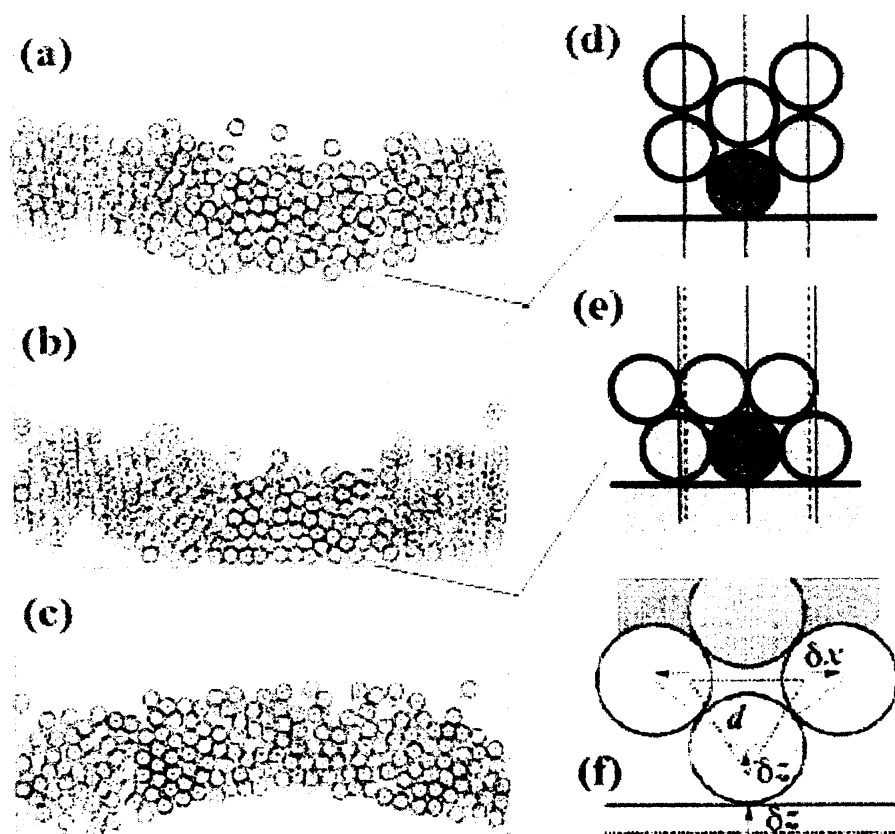


図 4. 粒子の容器底面との衝突と粒子の再配置.

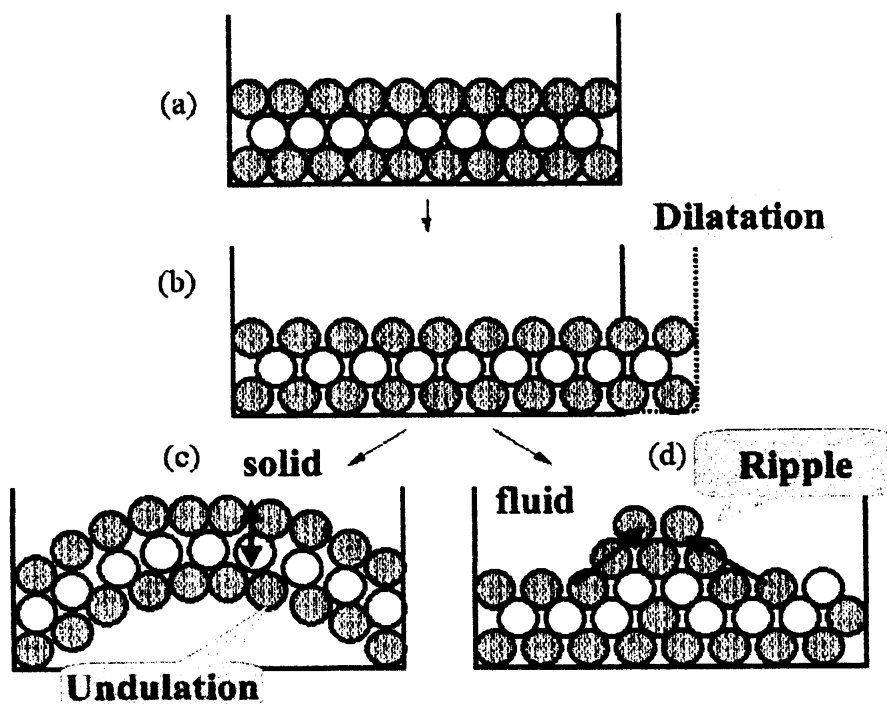


図 5. 粒状体の割り込みと膨張による変形.

Undulation の発生は粒状体を弾性体とみなし、その両端に与えられた力による座屈として理解できる⁴⁾。水平長 L 、高さ h 、奥行長 W の弾性体の棒の両端から、棒に沿って内向きに力 F を加えると、力が弱ければ力に比例した圧縮 $\Delta L = FL/(SE)$ が起こるだけである。ここで、 E はヤング率、 $S=Wh$ である。しかし、力の大きさを増してある臨界値に達したときに、突然、座屈を生じ、湾曲が起こる。この臨界値の近くでの振舞いは以下のようにして説明される。すなわち、位置 x における変位を u とおくと、変位の小さいうちは u は近似的に

$$EI \frac{d^2 u}{dx^2} = -Fu \quad \text{ただし, } I = \frac{Wh^3}{12} \quad (1a), (1b)$$

(I は曲げに対する断面の幾何学的慣性モーメント) で与えられる。これを棒の両端 $x=0, L$ で $u=0$ の条件下で解くと

$$u = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \text{ただし} \quad F = EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (2a), (2b)$$

となる。変形の振幅 A はこの近似では決まらない。変形の起こる最小の荷重 ($n=1$ のとき)

$$F_c = EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

はオイラー荷重と呼ばれている。

変位が大きい場合には式(1a)の代わりに

$$EI \frac{d^2 \theta}{ds^2} = -F \sin \theta \quad (3)$$

となる。ただし、 s は層に沿って測った座標、 θ は層の接線が x 軸となす角度である。式(3)は大振幅の振り子の運動と同値で、解は楕円関数を用いて表わされる。

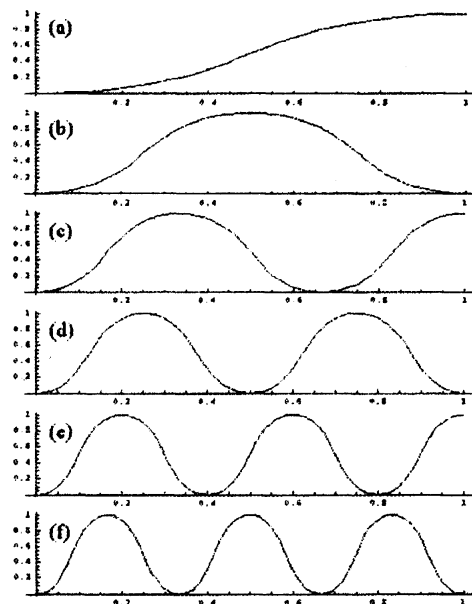


図 6. Undulation モードの例;

(a) A_1 , (b) S_1 , (c) A_2 ,
(d) S_2 , (e) A_3 , (f) S_3 .

$$z = \frac{2k}{\alpha} [1 - \text{cn}(\alpha s)] \quad (4a)$$

$$x = \frac{2}{\alpha} \left[E(\text{am}(\alpha s), k) - \frac{1}{2} \alpha s \right] = \frac{2}{\alpha} \left[Z(\text{am}(\alpha s), k) + \left(\frac{E}{K} - \frac{1}{2} \right) \alpha s \right] \quad (4b)$$

ここで, $\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$, $\text{cn}(\alpha s)$ は Jacobi の楕円関数, $E(\phi, k)$ は第 2 種楕円積分, $Z(\phi, k)$ は Jacobi のゼータ楕円関数, $\phi = \text{am}(\alpha s)$ は振幅関数, K, E はそれぞれ第 1 種, 第 2 種の完全楕円積分である. 図 6 に計算の一例を示す.

4. 弾性波の伝播

前節では, 変形を静力学の問題として扱ったが, 実際には変形の山と谷が交替する動的な現象である. そこで, まずはじめに, 撓んだ粒状体の層が容器底面壁に衝突したときに何が起きているかを眺めてみよう. 図 7 は図 1 と同様の undulation モードを高速度ビデオで撮影し, 隣接した画像間を差し引きしたものである. 画像間の時間差 Δt は 1/500 秒である. 粒状体の層の中で粒子が消えている部分は, 粒子が相対的に静止していたことを示している. 層が容器底面に衝突すると, そこで粒子は圧密状態になり, その領域は両側に伝播していく. それと同時に圧密状態にあった領域では粒子の圧縮状態が緩和され膨張が起こる. こうして粒状体の層に沿った弾性波の発生と伝播が繰り返される.

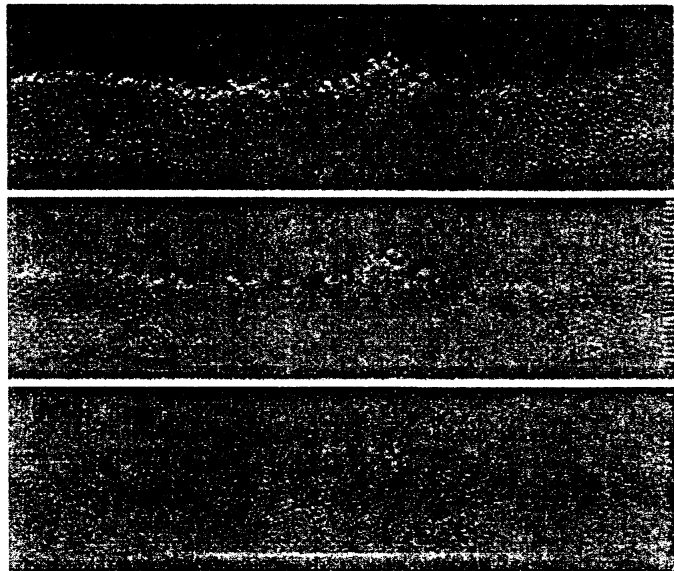


図 7. Undulation における疎密波の伝播 ($f = 45 \text{ Hz}$, $a = 0.82 \text{ mm}$).

この弾性波をモデル化して解析しよう．図8のように，容器底面上に乗った高さ h の弾性体の層の一端 $x = 0$ に $t = 0$ で急激な圧力 p_0 が加わり，変位 $\mathbf{u} = (u, w)$ が生じたとする．ここで，層は2次元と仮定し， x, z 方向の変位の成分をそれぞれ u, w とした．弾性体の密度を ρ ，体積弾性率を K とすると，この変位の満たすべき方程式，および初期・境界条件は

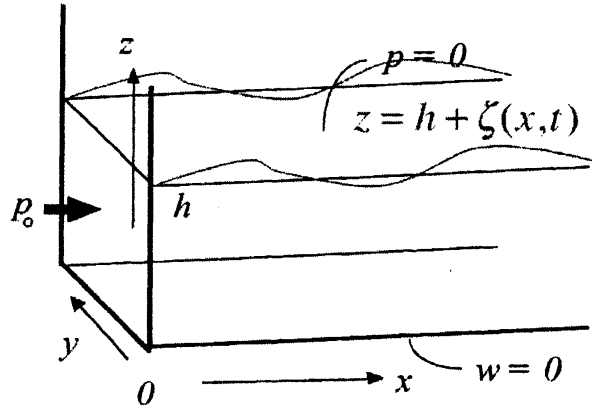


図8．粒状体の層における変位の伝播．

$$p = -K \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (5a) \quad \begin{array}{l} t \leq 0 : \mathbf{u} = 0 \\ t > 0 : \end{array}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u \quad (5b) \quad p = -K \frac{\partial u}{\partial x} = p_0 \quad \text{at } x = 0 \quad (\text{BC1})$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w \quad (5c) \quad \begin{array}{l} w = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (\text{BC2}) \\ p = 0 \quad \text{at } z = h + \zeta(x, t) \quad (\text{BC3}) \end{array}$$

で与えられる．これらに加えて，自由表面 $z = h + \zeta(x, t)$ での運動学的，

および力学的条件は，微小変位 ζ の1次までの近似で

$$\dot{w} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \bigg|_{z=h} = 0 \quad (6a), (6b)$$

で与えられる。境界条件 (BC2) を考慮して、

$$u = \sum_n \cos\left(\frac{\pi n z}{2h}\right) f_n(x, t) \quad (7a)$$

$$w = \sum_n \sin\left(\frac{\pi n z}{2h}\right) g_n(x, t) \quad (7b)$$

と仮定し、ラプラス変換を利用して解を求めると

$$t \leq \frac{x}{c} \quad \text{で} \quad u = 0 \quad (8a)$$

$$t > \frac{x}{c} \quad \text{で}$$

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 4cp_0}{K\pi(2m+1)} \cos\left(\frac{\pi(2m+1)z}{2h}\right) \int_{x/c}^t J_0\left(cq_{2m+1}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2}\right) d\tau \quad (8b)$$

を得る。ここで $q_n = \frac{\pi n}{2h}$, $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ とおいた。また、 J_0 は 0 次のベッセル関数である。

式 (8b) の最小モードは $n=1$ ($m=0$) の場合で

$$u_1 = \frac{4cp_0}{\pi K} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \int_{\xi}^t J_0\left(\frac{\pi c}{2h}\sqrt{\tau^2 - \xi^2}\right) d\tau \quad (9)$$

となる。ただし $\xi = \frac{x}{c}$ とおいた。図 9 は x 方向の変位 u_1 の空間分布を、その時間経過を追って重ねたものである。ただし、鉛直方向の依存性 $\cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right)$ を除いた部分を示している。 $t=0$ で左端に与えられた圧力は時間が経つにつれて右方向に伝播する。変位の伝播する最先端付近の圧力は時間とともに減少し、その後方に変位が負の領域、すなわち膨張領域が認められる。この疎密波は図 7 と定性的に一致する。

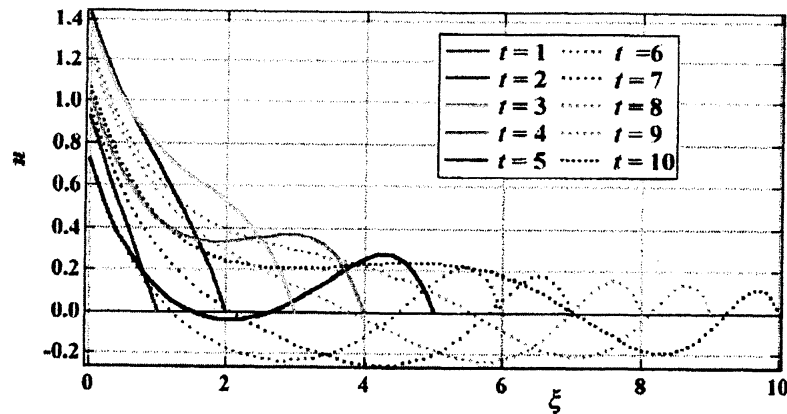


図 9. 最小モード u_1 の空間分布.

応力集中とスパイク状の表面変形：

式(5a)を用いて、 u_1 による応力 p_1 を求めると

$$p_1 \propto \frac{8hp_0}{\pi^2 K} \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \left[\frac{\pi c}{2h} \xi \int_{\xi}^t \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} J_1\left(\frac{\pi c}{2h} \sqrt{\tau^2 - \xi^2}\right) d\tau - 1 \right] \quad (10)$$

が得られる。これを図示したものが図 10 である。

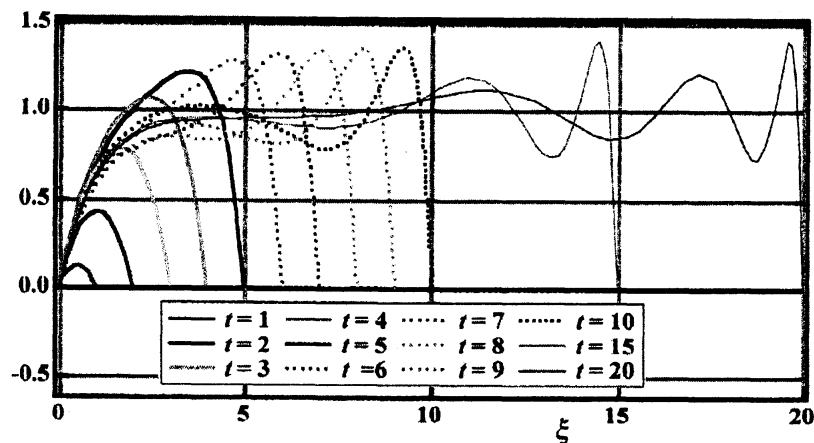


図 10. Undulation における応力分布とその伝播.

変位が伝播する先端付近に応力のピークが現れ、また、時間の経過とともにその後方には第 2, 第 3 のピークが現れる。ただし、後者の大きさは順に小さくなっていく。さて、われわれの undulation ではアーチ状に湾曲した層がその足下の部分で同時に容器底面に衝突するので、1 つのアーチの両端から中央の山に向かって圧縮波が

伝播する．したがって，中央付近では2つの圧縮波が重なり，強い応力が局在すると考えられる．その結果，局所的に座屈が発生し，これは自由表面を上方に押し上げて ripple となると考えられる．図11はその一例を示したものである．



図11. Undulation の山頂部の変位と Ripple の発生.

5. 議論

鉛直に振動する粒状体薄層に見られる撓み波 undulation と表面波 ripple, およびその内部を伝わる弾性波についての実験と簡単な理論モデルについて述べてきた．実験観測結果は非常に多種多様であり，理論的な理解はまだ緒についたばかりと言える．その原因の一つは，粒状体が粒子系と連続体の狭間にあり，これまでの力学の知識の1つだけを適用したのでは不十分なことにある．たとえば，粒子が3層程度以上になれば連続体的な挙動を示すが³⁾，その場合でも，加振の条件次第では粒子間の摩擦が十分大きく働いて弾性体として振舞ったり（撓み波），全体が流動化して流体的に振舞ったり（表面波）する⁴⁾．両者間の遷移には履歴があり，また，領域内に両者が混在することも稀ではない．他の原因として無視できないものに，媒質をマクロに扱うときの物性値の問題がある．例えば，密に集合した粒子系に力を加えると膨張が起こる，いわゆるダイラタンシーは粒状体のもつ1つの著しい特徴である¹⁾．媒質を構成す

る個々の粒子は変形しなくても、その配置が変わることにより粒子間隙の体積が変わることは図 1 2 (a)→(b) から納得できよう。この場合、粒子間の割り込みの程度により媒質としての体積が変わるが、通常なら力を加えることにより体積が減少して密度は高くなるのに、この場合には力を加えることにより膨張し密度は低下する。また、図 1 2 (c) のように、1つの方向に圧縮したときにこれと直角方向に膨張する割合、すなわち、粒状体全体としての実効ポアソン比 σ^* は $\sigma^* = \tan^2 \theta$ となり（角度 θ の定義は図 1 2 (c) を参照）、最密充填近傍で $\sigma^* \approx 3$ という常識を超えた値になる。単純なモデルを考えるときには、密度、ヤング率や体積弾性率、ポアソン比などの物質定数を一定と仮定することが多いが、実際にはこれらの物質定数が粒子群の相互作用や運動状態で決まるという複雑な現象となる。これまでわれわれはオイラーの遺産を受け継いで多くの成果を得てきたが、こうした複雑系におけるパターン形成の理解を深めていくことは、今後に残された大きな課題と言えよう。

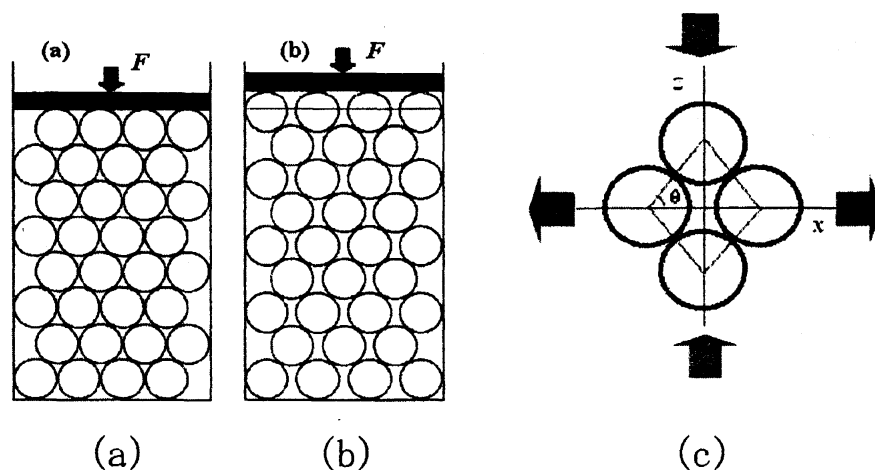


図 1 2. ダイラタンシー．力をかけると体積が膨張する．

参考文献

- [1] 佐野 理：日本物理学会誌 BUTSURI 60 (2005) 440.
- [2] A.Ugawa and O.Sano : *J. Phys. Soc. Jpn.* 72 (2003) 1390.
- [3] K.Kanai, A.Ugawa and O.Sano : *J. Phys. Soc. Jpn.* 74 (2005) 1457.
- [4] O.Sano : *Phys. Rev. E* 72 (2005) 051302.